CH XI Nombres entiers et problèmes

Petit problème pour démarrer :

Les élèves de 3ème étaient 208 au collège Leprince Ringuet en 2023.
On souhaite faire des groupes de même effectif avec au maximum 30 élèves. Combien de groupes peut-on faire ? Combien d'élèves par groupe ?

On ne peut faire 8 groupes de 26, mais pas 9 groupes car 208 : 9 ≈ 23,1
On peut aussi faire 16 groupes de 13 ou encore 104 groupes de 2 …

I) diviseurs et multiples

Vocabulaire : $12 = 4 \times 3$
On dit que 12 est un multiple de 4 et inversement que 4 est un diviseur de 12.
On dit aussi que 12 est divisible par 4. Les diviseurs de 12 sont : 1-2-3-4-6-12

Retour au problème de départ :

Combien de groupes de même effectif peut-on faire en utilisant tous les élèves ? Combien d'élèves par groupe ?

On peut chercher tous les diviseurs de 208 cela nous donnera le nombre de groupe. On ne garde que ceux qui permettent d'avoir moins de 30 élèves.

stratégie pour trouver tous les diviseurs :

Pour des nombres pas trop grands, les tables de multiplication et les astuces de calcul mental, permettent de trouver facilement des diviseurs, mais il n'est pas si simple de tous les trouver.

Pour ne pas en oublier,		$208 = 1 \times 208$
on peut appliquer la **stratégie suivante :**		$= 2 \times 104$
	(3 ne marche pas)	$= 4 \times 52$
On essaie tous les nombres	*(ni 5, ni 7)*	$= 8 \times 26$
dans l'ordre, on les trouve par paire		$= 13 \times 16$
on retombe sur les mêmes -> fini		$= 16 \times 13$

II) Les Nombres premiers

Définition : **Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.**

exemples :

0 - 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19

1 n'est pas un nombre premier, il ne possède qu'un diviseur.

2 est le seul nombre pair premier

9 n'est pas premier car $3 \times 3 = 9$ et 3 est un diviseur de 9

Pour savoir si un grand nombre est premier, on regarde s'il n'a pas de diviseur évident, puis on cherche à le diviser par tous les nombres premiers inférieur à sa racine carrée.

261 est-il un nombre premier ? non car il se divise par 3 $(2 + 6 + 1 = 9)$

263 ? oui, il ne se divise pas par 2-3-5-7-11-13-17 $\sqrt{263} \approx 16{,}2$ test -> 17

Propriété : Il existe une <u>infinité</u> de nombres premiers.

III) Décomposition en produit de facteurs premiers :

1) propriétés :

Tout nombre entier peut s'écrire comme le <u>produit de facteurs premiers</u>. Cette décomposition est <u>unique</u>.

2) exemples :

- Donner la décomposition en produit de facteurs premiers :

$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5$ que l'on peut noter $2^2 \times 3 \times 5$

- Même chose avec 208

$208 = 2 \times 104 = 2 \times 2 \times 52 = 2 \times 2 \times 2 \times 26 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13 = 2^4 \times 13$

Décomposer 2088 en produit de facteurs premiers :

On divise par les nombres premiers,
en essayant par 2 autant que possible,
puis par 3, … $2088 = 2^3 \times 3^2 \times 29$

2088	2
1044	2
522	2
261	3
87	3
29	29
1	fini

3) applications :

- Pour rendre une fraction irréductible :

$$\frac{\mathbf{208}}{\mathbf{2088}} = \frac{2^4 \times 13}{2^3 \times 3^2 \times 29} = \frac{2 \times 13}{3^2 \times 29} = \frac{26}{261}$$

- Pour problèmes de partage :

Pour le 1er mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses. Elle veut faire des bouquets tous identiques en utilisant toutes les fleurs. Combien de bouquets peut-elle faire ? Quelle sera leur composition ?

$182 = 2 \times 7 \times 13$ et $78 = 2 \times 3 \times 13$. On peut faire 2, 13 ou 26 bouquets

2 -> 81 brins de m et 39 roses ; 13 -> 14 m et 6 r ; 26 -> 7 m et 3 r