

CH X Équations

I) Généralités sur les équations

Des problèmes de partage, de coût, d'optimisation sont nombreux dans le domaine mathématique et dans la vie courante. L'utilisation du calcul littéral et des équations permet d'en résoudre certains plus rapidement à conditions de savoir modéliser le problème, de connaître les règles de calcul littéral et de connaître quelques techniques de résolutions d'équations.

1) Définitions

- Une **équation** est une égalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre.
Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.
- Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.
- **Résoudre** une équation, c'est en trouver toutes les solutions.

2) Exemples d'équations

$$(1) 2x + 5 = 12$$

$$(2) 4x + 3 = 2x + 11$$

$$(3) 4x - 5 = 2x + 2$$

$$(4) 2x - 2 = 2(x - 1,5) + 1$$

$$(5) 5 - 3x = -3x + 6$$

$$(6) x^2 = 16$$

$$(7) 4x^2 - 21x + 49 = 0$$

$$(8) (x + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0$$

$$(9) x^2 + 10x = 39$$

3) Propriétés

a) somme et différence

Une égalité reste vraie lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres.

a , b et k désignent des nombres.

Si $a = b$, alors $a + k = b + k$ et $a - k = b - k$

b) produit et quotient

Une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie (ou divise) chacun de ses membres par un même nombre non nul.

a , b et k désignent des nombres ($k \neq 0$).

Si $a = b$, alors $a \times k = b \times k$ et $\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$

II) Equations du 1^{er} degré

1) exercice modèle

Résoudre l'équation (3) $4x - 5 = 2x + 2$

$$4x - 5 + 5 - 2x = 2x + 2 + 5 - 2x$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{7}{2} \quad \mathbf{x = 3,5}$$

*On veut mettre tous les x du même côté,
à gauche par exemple et donc les nombres à droite*

2) exemple de problème

Agnès a 3 ans de moins que Soukayna, et Xander a le double de l'âge d'Agnès.

À eux trois, ils ont 107 ans.

Quel est l'âge d'Agnès ?

- On choisit l'inconnue : x est l'âge d'Agnès.
- On traduit les données du problème par une équation :
Agnès a 3 ans de moins que Soukayna, donc Soukayna a 3 ans de plus qu'Agnès.
Ainsi l'âge de Soukayna est égal à $x + 3$.
Xander a le double de l'âge d'Agnès, donc l'âge de Xander est égal à $2x$.
À eux trois, ils ont 107 ans, ce qui se traduit par l'équation $x + x + 3 + 2x = 107$.

- On résout l'équation :

$$x + x + 3 + 2x = 107$$

$$4x + 3 = 107$$

$$4x + 3 - 3 = 107 - 3$$

$$4x = 104$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{104}{4}$$

On retranche 3 aux deux membres de l'égalité.



On divise les deux membres par 4.



Agnès a 26 ans

III) Equations du 2ème degré

Certaines équations du 2^{ème} degré peuvent être résolues en 3^{ème}. Leur résolution est étudiée au lycée.

1) équation carré :

L'équation $x^2 = a$ possède :

- deux solutions si $a > 0$, $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$

- une solution si $a = 0$ $x = 0$

- aucune solution (en 3^{ème}) si $a < 0$

$2x^2 = 14$ donc $x^2 = 7$ (on divise par 2 chaque côté)

deux solutions $x = \sqrt{7}$ et $x = -\sqrt{7}$

2) équation produit nul

Pour que $A \times B = 0$ il faut que $A = 0$ ou $B = 0$

$$(2x + 1)(x - 7) = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -0,5$$

on reconnaît une équation produit nul

ou $x - 7 = 0$

ou $x = 7$

Les solutions sont $x = -0,5$ ET $x = 7$