CH XI Homothétie et triangles semblables

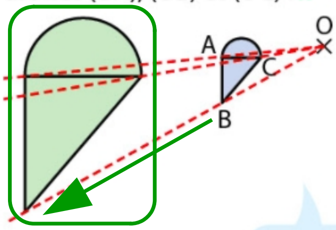
I) Transformer une figure par homothétie (leçon p 192)

1) Définition

Soit un point O.
Transformer une figure par une **homothétie** de centre O, c'est l'agrandir ou la réduire en faisant glisser ses points le long de droites passant par O.
Une homothétie est définie par :
- un centre ;
- un rapport k non nul.

Exemples

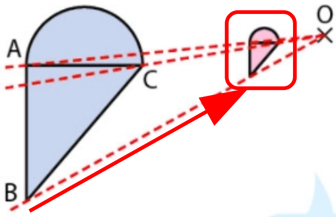
Exemple 1
On veut transformer la figure bleue par l'homothétie de centre O et de rapport 3.
On fait glisser la figure bleue le long des droites (OA), (OB) et (OC) : $k = 3$.



La figure verte est un agrandissement de rapport 3 de la figure bleue : toutes les longueurs sont multipliées par 3.

Lorsque $k > 1$, l'homothétie effectue un agrandissement de la figure.

Exemple 2
On veut transformer la figure bleue par l'homothétie de centre O et de rapport 0,25.
On fait glisser la figure bleue le long des droites (OA), (OB) et (OC) : $k = 0{,}25$.

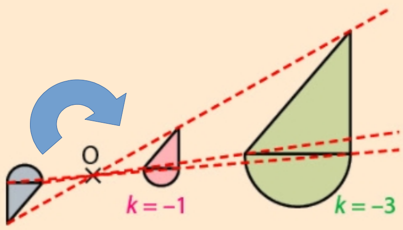


La figure rose est une réduction de rapport 0,25 de la figure bleue : toutes les longueurs sont multipliées par 0,25.

Lorsque $0 < k < 1$, l'homothétie effectue une réduction de la figure.

2) homothétie de rapport négatif

Lorsqu'on fait glisser les points d'une figure de l'autre côté du centre de l'homothétie, la figure effectue un demi-tour autour de ce centre.
C'est le cas où le rapport de l'homothétie est négatif.

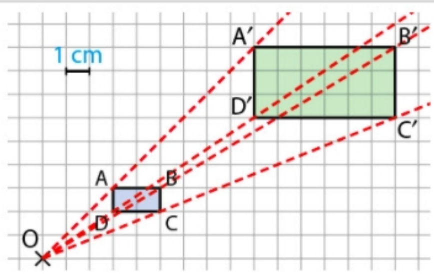


3) propriétés

- Une figure et son image par une homothétie ont la même forme.
  L'homothétie **conserve les alignements et les angles**.
- Par une homothétie de rapport $k > 0$, les longueurs sont multipliées par k et les aires par k^2.

Exemple

Le rectangle A'B'C'D' est l'image du rectangle ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 3$.
AB = 2 cm donc A'B' = … × … = …
Aire_{ABCD} = …
donc $\text{Aire}_{A'B'C'D'}$ = …



II) Triangles semblables

L'image d'une figure par une homothétie, est une figure de même forme, c'est le cas en particulier pour les triangles. Le triangle de départ et son image par homothétie sont des triangles semblables.

1) Définition :

Deux triangles sont semblables quand leurs angles ont la même mesure.

2) Propriétés :

a) propriétés caractéristiques :

Il suffit que deux angles aient la même mesure pour que les triangles soient semblables.

Si les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles, alors ils sont semblables.

b) autre propriété :

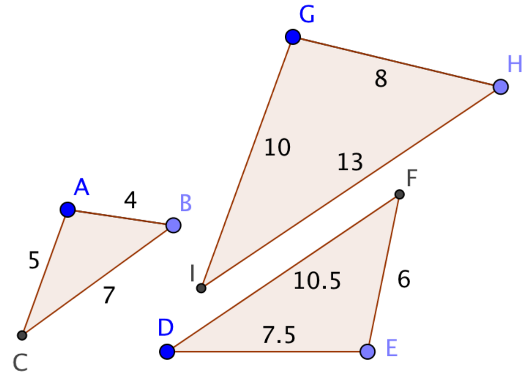
Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés de ces triangles sont proportionnelles.

3) Exemples :

Voici trois triangles ABC et DEF et GHI.

Lesquels sont semblables ? Justifier

ABC	4	7	5
EFD			
GHI			



4) agrandissement et réduction

EFD est un agrandissement de ABC de rapport …

Les angles sont …

Les longueurs sont multipliées par …

Les aires sont multipliées par …

Agrandissement ou réduction de rapport k :

- longueurs multipliées par k

- aires multipliées par k^2

- volumes multipliés par k^3

5) cas particulier : les triangles égaux

Si deux triangles semblables et qu'une longueur est conservée, on parle de triangles égaux.
Toutes les longueurs sont alors égales.