

CH XII Équations et inéquations

I) Équations

1) Principe de base

Des problèmes de partage, de coût, d'optimisation sont nombreux dans le domaine mathématique et dans la vie courante. L'utilisation du calcul littéral et des équations permet d'en résoudre certains plus rapidement à conditions de savoir modéliser le problème, de connaître les règles de calcul littéral et de connaître quelques techniques de résolutions d'équations.

2) Définitions

- Une **équation** est une égalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre.
Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.
- Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.
- **Résoudre** une équation, c'est en trouver toutes les solutions.

3) Exemples d'équations

(1) $2x + 5 = 12$

(4) $2x + 2 = 2(x - 1,5) + 1$

(7) $4x^2 - 21x + 49 = 0$

(2) $4x + 3 = 2x + 11$

(5) $5 - 3x = -3x + 6$

(8) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0$

(3) $3x - 5 = 2x + 2$

(6) $x^2 = 16$

(9) $x^2 + 10x = 39$

4) Propriétés

a) somme et différence

Une égalité reste vraie lorsqu'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres.

a, b et k désignent des nombres.

Si $a = b$, alors $a + k = b + k$ et $a - k = b - k$

L'idée, c'est de ramener tous les x d'un côté et tous les nombres de l'autre. Cette technique mathématique correspond à la recette de cuisine bien connue « change de côté = change de signe »

b) produit et quotient

Une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie (ou divise) chacun de ses membres par un même nombre non nul.

a, b et k désignent des nombres ($k \neq 0$).

Si $a = b$, alors $a \times k = b \times k$ et $\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$

5) Exercices modèles

Résoudre l'équation (1) $2x + 5 = 12$

Pour résoudre l'équation le **5** nous gêne.
On va enlever 5 à gauche,
mais il faut l'enlever aussi à droite

$$2x + 5 - 5 = 12 - 5$$

on obtient : $2x = 7$

On peut maintenant trouver le résultat de tête,
mais avec des nombres plus compliqués,
il est intéressant de savoir gérer la fin
en divisant par 2 de chaque côté (2 est le nombre de x)

$$\frac{2x}{2} = \frac{7}{2} \quad \mathbf{x = 3,5}$$

Résoudre l'équation (3) $3x - 5 = 2x + 2$

On veut mettre tous les x du même côté,
à gauche par exemple et donc les nombres à droite

$$3x - 5 + 5 = 2x + 2 + 5$$

$$3x = 2x + 7$$

$$3x - 2x - 2x = 2x + 7 - 2x$$

$$\mathbf{x = 7}$$

on aurait pu gérer les nombres et les x en même temps

6) problèmes

Agnès a 3 ans de moins que Soukayna, et Xander a le double de l'âge d'Agnès.

À eux trois, ils ont 107 ans.

Quel est l'âge d'Agnès ?

- On choisit l'inconnue : x est l'âge d'Agnès.

- On traduit les données du problème par une équation :

Agnès a 3 ans de moins que Soukayna, donc Soukayna a 3 ans de plus qu'Agnès.

Ainsi l'âge de Soukayna est égal à $x + 3$.

Xander a le double de l'âge d'Agnès, donc l'âge de Xander est égal à $2x$.

À eux trois, ils ont 107 ans, ce qui se traduit par l'équation $x + x + 3 + 2x = 107$.

- On résout l'équation :

$$x + x + 3 + 2x = 107$$

$$4x + 3 = 107$$

$$4x + 3 - 3 = 107 - 3$$

$$4x = 104$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{104}{4}$$

$$x = 26$$

On retranche 3 aux deux membres de l'égalité.



On divise les deux membres par 4.



On conclut : Agnès a 26 ans

6) Pour aller plus loin

Certaines équations du 2ème degré peuvent être résolues en 3ème, mais leur résolution systématique est étudiée au lycée.

a) principe du produit nul

Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$

b) équation produit nul

Résoudre $(2x + 1)(x - 7) = 0$

$$2x + 1 = 0 \quad \text{ou}$$

$$2x = -1$$

$$2x/2 = -1/2$$

$$x = -0,5$$

On reconnaît une équation produit nul.

$$x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

Les solutions de cette équation sont $-0,5$ et 7

II) Inéquations

1) définitions :

Une inéquation est une inégalité qui comporte une ou plusieurs lettres. Cette égalité peut être vraie ou fausse selon les valeurs des inconnues.

2) exemples :

$$(1) 3x - 5 < 7$$

$$(2) 2x \geq 4x + 2$$

$$(3) x^2 \leq 4$$

3) résolution :

Pour résoudre une inéquation du 1^{er} degré (comportant uniquement des x), on applique les mêmes techniques pour isoler x que pour les équations avec un cas particulier.

4) propriétés particulières :

cas 1 : Quand on multiplie chaque membre d'une équation par un nombre positif, cela ne change pas le sens de l'inégalité.

cas 2 : Quand on multiplie chaque membre d'une équation par un nombre négatif cela change le sens de l'inégalité.

5) exemples :

$$3x - 5 < 7$$

$$3x < 12$$

$$3x/3 < 12/3$$

$$x < 4$$

$$2x \geq 4x + 2$$

$$-2x \geq 2$$

$$-2x/-2 \leq 2/-2$$

$$x \leq -1$$

On peut envoyer les x de l'autre côté pour contourner le problème

pour la 3ème équation $S = [-2 ; 2]$