CH II Triangles rectangles

I) utiliser l'égalité de Pythagore

1) théorème de Pythagore pour calculer une longueur

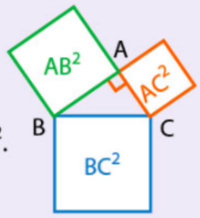
Théorème

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si un triangle ABC est rectangle en A, alors $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.

Cette égalité est appelée « **égalité de Pythagore** ».



Exemples

Calculer la longueur de l'hypoténuse

Le triangle ARS est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$RS^2 = RA^2 + AS^2$

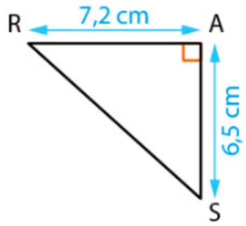
$RS^2 = 7{,}2^2 + 6{,}5^2$

$RS^2 = 51{,}84 + 42{,}25$

$RS^2 = 94{,}09$

$RS = \sqrt{94{,}09}$

$RS = 9{,}7$ cm



Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Le triangle EFG est rectangle en G.

D'après le théorème de Pythagore :

$EF^2 = EG^2 + GF^2$

$4{,}8^2 = 2{,}5^2 + GF^2$

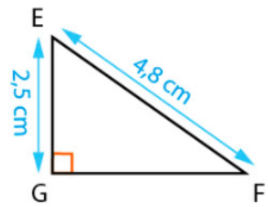
$23{,}04 = 6{,}25 + GF^2$

$GF^2 = 23{,}04 - 6{,}25$

$GF^2 = 16{,}79$

$GF = \sqrt{16{,}79}$

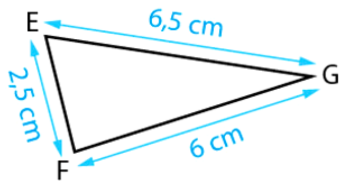
$GF \approx 4{,}1$ cm



2) réciproque du théorème de Pythagore pour savoir si un triangle est rectangle

Dans un triangle, si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

a) cas favorable



$EG^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$

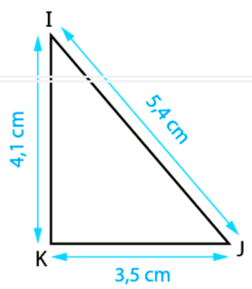
$\left.\begin{array}{l} EF^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25 \\ FG^2 = 6^2 = 36 \end{array}\right\} 42{,}25$

On constate que $EG^2 = EF^2 + FG^2$

L'égalité de Pythagore est vérifiée ou d'après la réciproque du théorème de Pythagore

Donc EFG est rectangle en F.

b) cas défavorable



$IJ^2 = 5{,}4^2 = 29{,}16$

$\left.\begin{array}{l} IK^2 = 4{,}1^2 = 16{,}81 \\ KJ^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25 \end{array}\right\} 29{,}06$

On constate que $IJ^2 \neq IK^2 + KJ^2$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée ou d'après la contraposée* du théorème de Pythagore

Donc IJK n'est pas rectangle

**on accepte la « réciproque du théorème de Pythagore » car la contraposée n'est pas au programme du collège*

II) Trigonométrie

1) Présentation

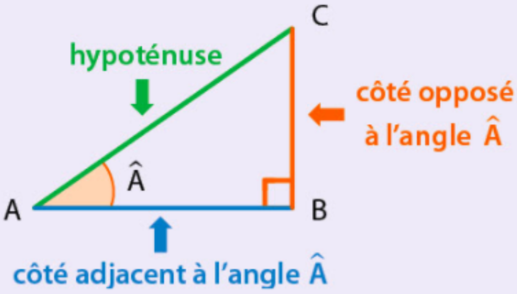
Dans un triangle rectangle, les rapports de longueurs ne dépendent que de la mesure des angles.
On va utiliser certains rapports pour calculer des longueurs ou des angles. Pour cela on introduit de nouvelles notations, le cosinus le sinus et la tangente.

2) formules

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}} = \frac{BC}{AB}$$



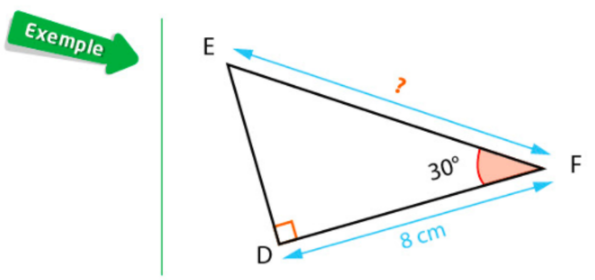
- Pour mémoriser : **SOH CAH TOA**

3) propriétés :

Le **cosinus, le sinus et la tangente** n'ont **pas d'unités**.
Le **cosinus et le sinus** d'un angle aigu sont toujours **compris entre 0 et 1**.
La **tangente** d'un angle aigu est toujours un **nombre positif**.

4) calculer une longueur

Il faut connaître un angle et une longueur



Dans le triangle EFD rectangle en D :

$$\cos \widehat{EFD} = \frac{FD}{EF}$$

$$\frac{\cos 30°}{1} = \frac{8}{EF}$$

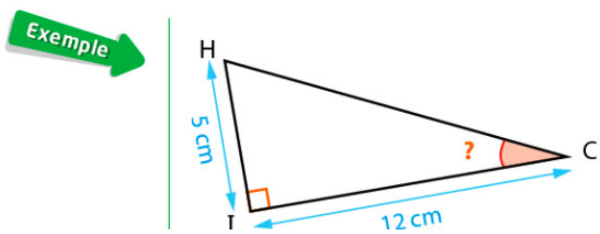
$$EF = \frac{8 \times 1}{\cos 30°}$$

$$EF \approx 9,2 \text{ cm}$$

5)

calculer un angle

Il faut connaître deux longueurs



Dans le triangle HIC rectangle en I :

$$\tan \widehat{HCI} = \frac{HI}{IC}$$

$$\tan \widehat{HCI} = \frac{5}{12}$$

$$\widehat{HCI} = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$\widehat{HCI} \approx 23°$$